Guía 1: Ley de Gauss

14. Se tienen tres distribuciones esféricas de carga (todas de radio R) con las siguientes características: A) $\rho = 2\ ^{\mu C}\!/_{m^3}$; B) $\rho = 2\ r^3\ ^{\mu C}\!/_{m^3}$ (si r está medido desde el centro de la esfera y está expresado en metros); C) $\rho = 2\ \cos\varphi\ ^{\mu C}\!/_{m^3}$ (siendo φ el ángulo acimutal, $0 \le \varphi \le 2\pi$). Para las tres distribuciones:

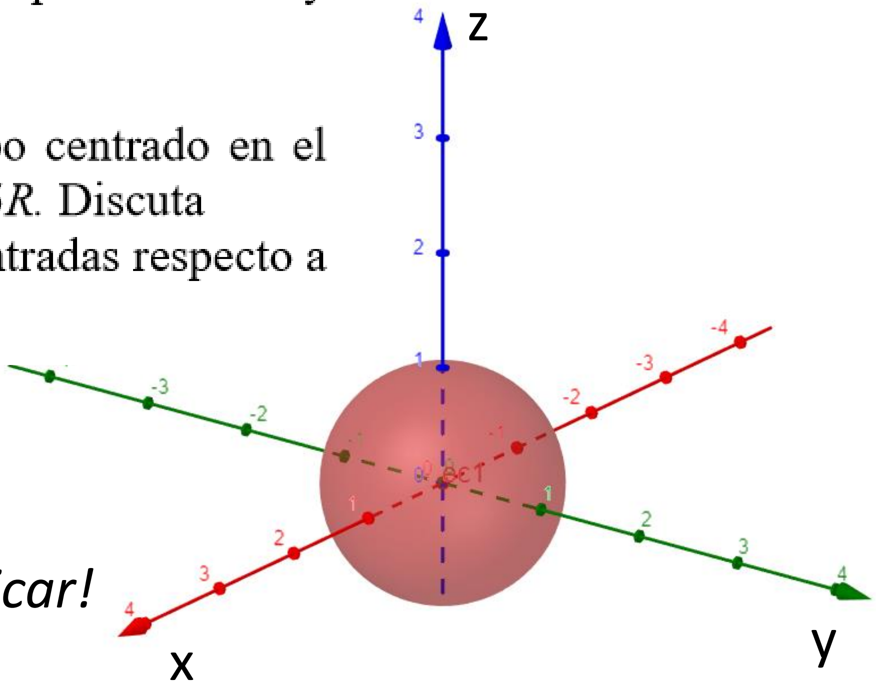
a. Calcular, si es posible, el campo eléctrico que genera en todo el espacio a partir de la Ley de Gauss.

b. Establecer si es válida la Ley de Gauss

c. Si es posible, calcular el flujo del campo eléctrico a través de un cubo centrado en el centro de la distribución de lado $3R$. Idem a través de una esfera de radio $1.5R$. Discuta

d. Si es posible, calcular el flujo del campo eléctrico a través de esferas centradas respecto a la distribución de radios R y $2R$, respectivamente.

R=1 para graficar!



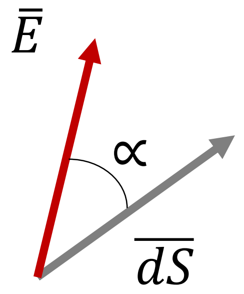
Ley de Gauss

$$\boxed{\emptyset = \oint\!\!\!\oint_S \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

¿Qué superficie usar?

¿Cuando se resuelve fácilmente el producto escalar?

$$\bar{E}.\overline{dS} = |\bar{E}|\left|\overline{dS}\right| \cos\alpha$$



$$\cos \propto = +1, paralelos \qquad \cos \propto = 0, ortogonales$$

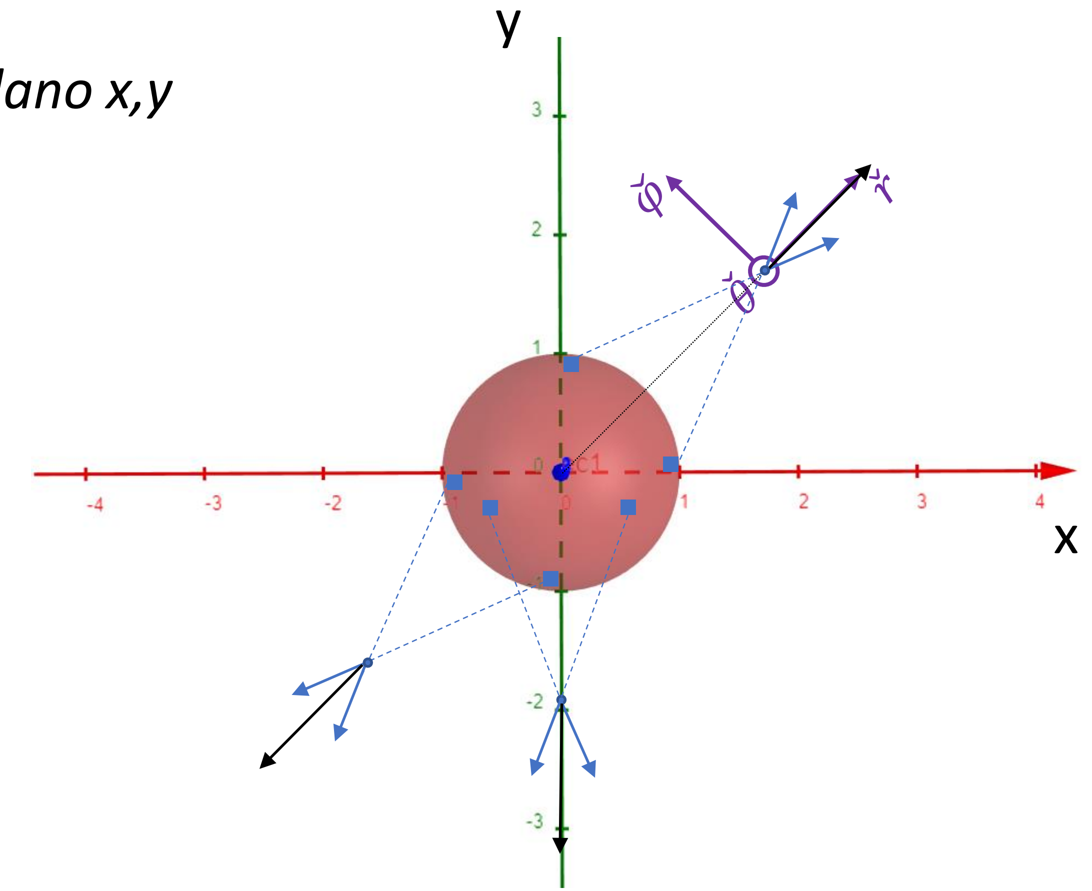
$$\cos \propto = -1, antiparalelos$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

a.- Calcular $\bar{E}$ en todo el espacio → $r < R$; → $r > R$

Plano x,y



¿Cómo son las líneas de campo $\bar{E}$?

Coordenadas esféricas

$$\bar{E}\,(\bar{r}) = |\bar{E}(r,\varphi,\theta)| \begin{cases} \check{r} \\ \cancel{\check{\varphi}} \\ \cancel{\check{\theta}} \end{cases}$$

Dependencia?

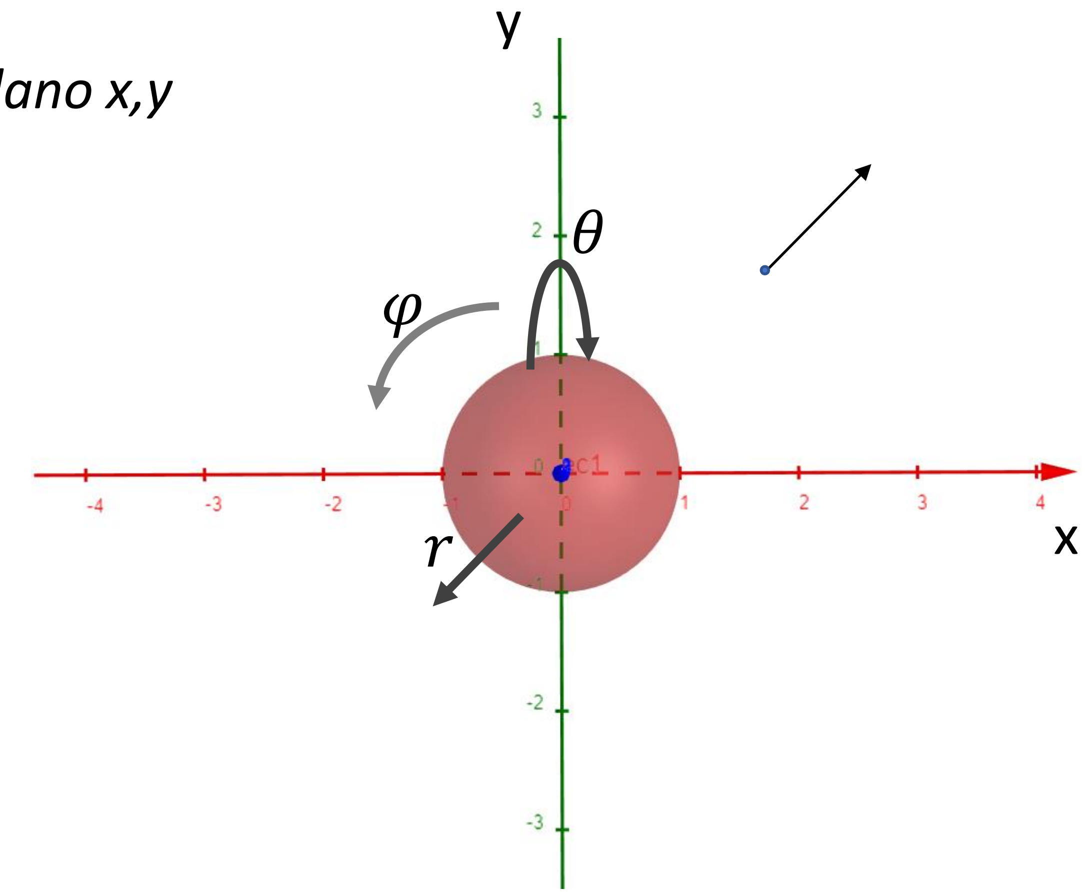
$\boxed{\text{Dirección?}}$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

a.- Calcular $\bar{E}$ en todo el espacio $\rightarrow$ $r < R$; $r > R$

Plano x,y



¿Cómo son las líneas de campo $\bar{E}$?

Coordenadas esféricas

$$\bar{E}\,(\bar{r}) = |\bar{E}(\,r,\cancel{\varphi},\cancel{\theta})| \begin{cases} \check{r} \\ \cancel{\check{\varphi}} \\ \cancel{\check{\theta}} \end{cases}$$

Dependencia?

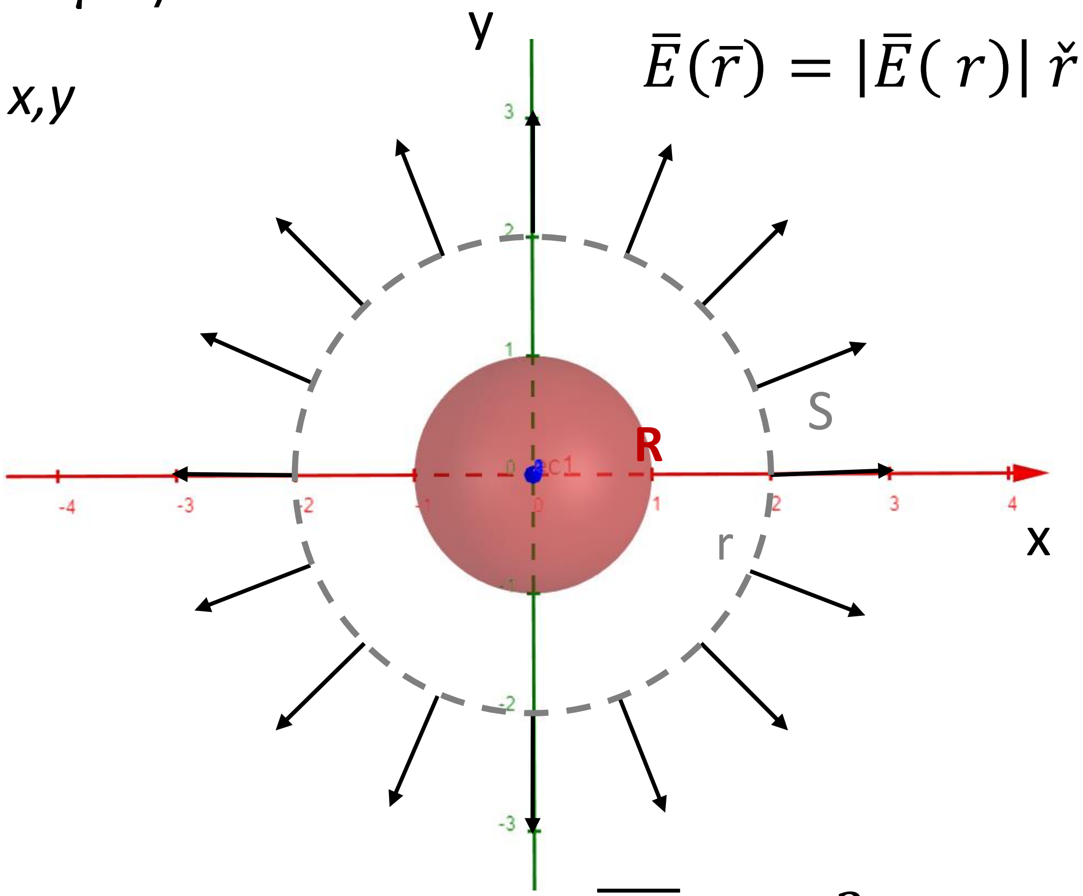
Dirección?

$$\boxed{\bar{E}(\bar{r}) = |\bar{E}(\,r)|\,\check{r}}$$

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

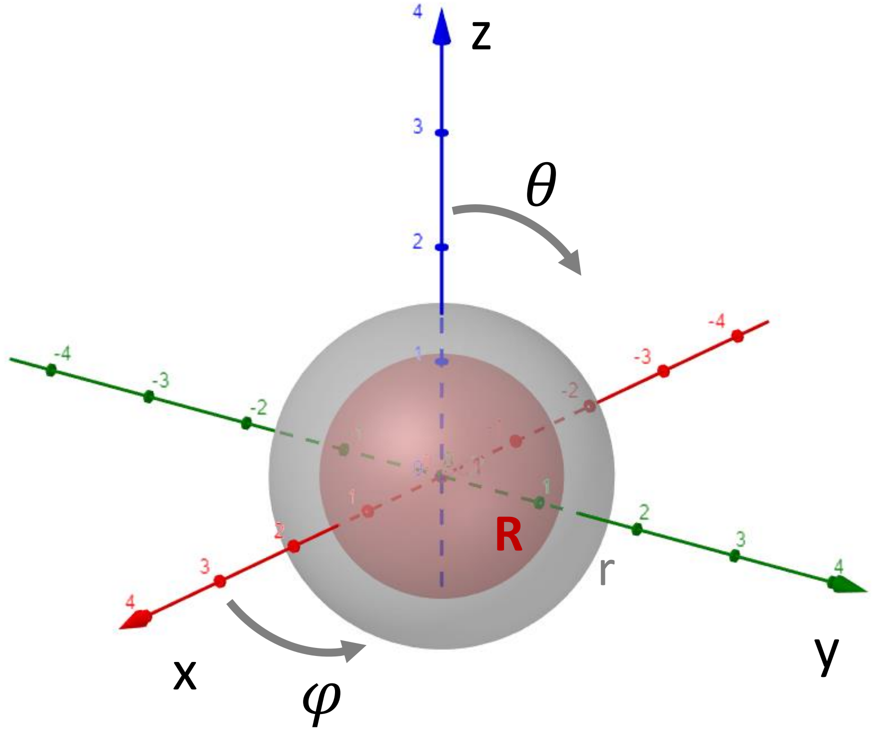
Plano x,y

$\bar{E}(\bar{r}) = |\bar{E}(r)|\ \check{r}$



¿Superficie de Gauss?

Esfera concéntrica con la distribución de cargas!



$$\overline{dS} = r^2 \sin\theta\, d\theta\ \ d\varphi\ \ \check{r}$$

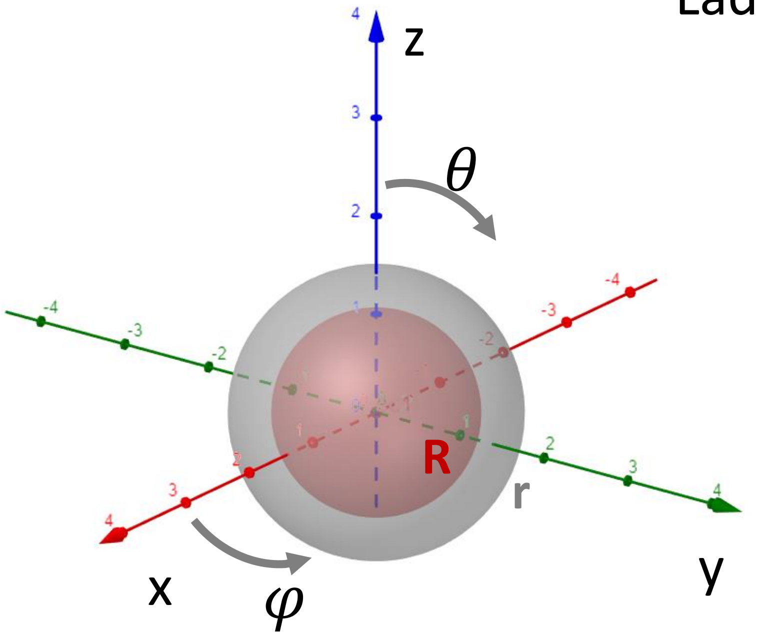
$$\bar{E}\ y\ \overline{dS}\ \ paralelos!$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

$r > R$

$$\emptyset = \oiint_S \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$



Lado izquierdo

$$\emptyset = \oiint_S |\bar{E}(r)|\,\check{r}\,.\,|\overline{dS}|\check{r} = \oiint_S |\bar{E}(r)||\overline{dS}|$$

$$= |\bar{E}(r)| \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \boxed{|\bar{E}(r)|4\pi r^2}$$

Lado derecho

$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV =$$

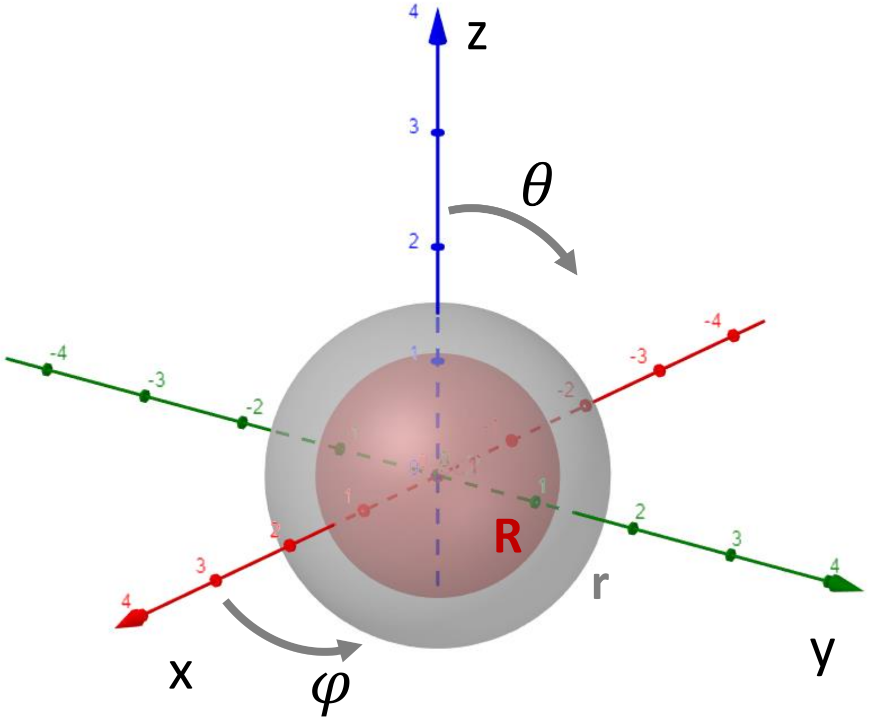
$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr + \cancel{\int_R^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 0\, dV}$$

$$\boxed{= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\overline{dS} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\ \check{r}$$

$$dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$



$$|\bar{E}(r)|4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\, R^3$$

$$|\bar{E}(r)| = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

De Gauss obtenemos el módulo

$$\boxed{\bar{E}(r) = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\ \breve{r} \qquad\qquad r > R}$$

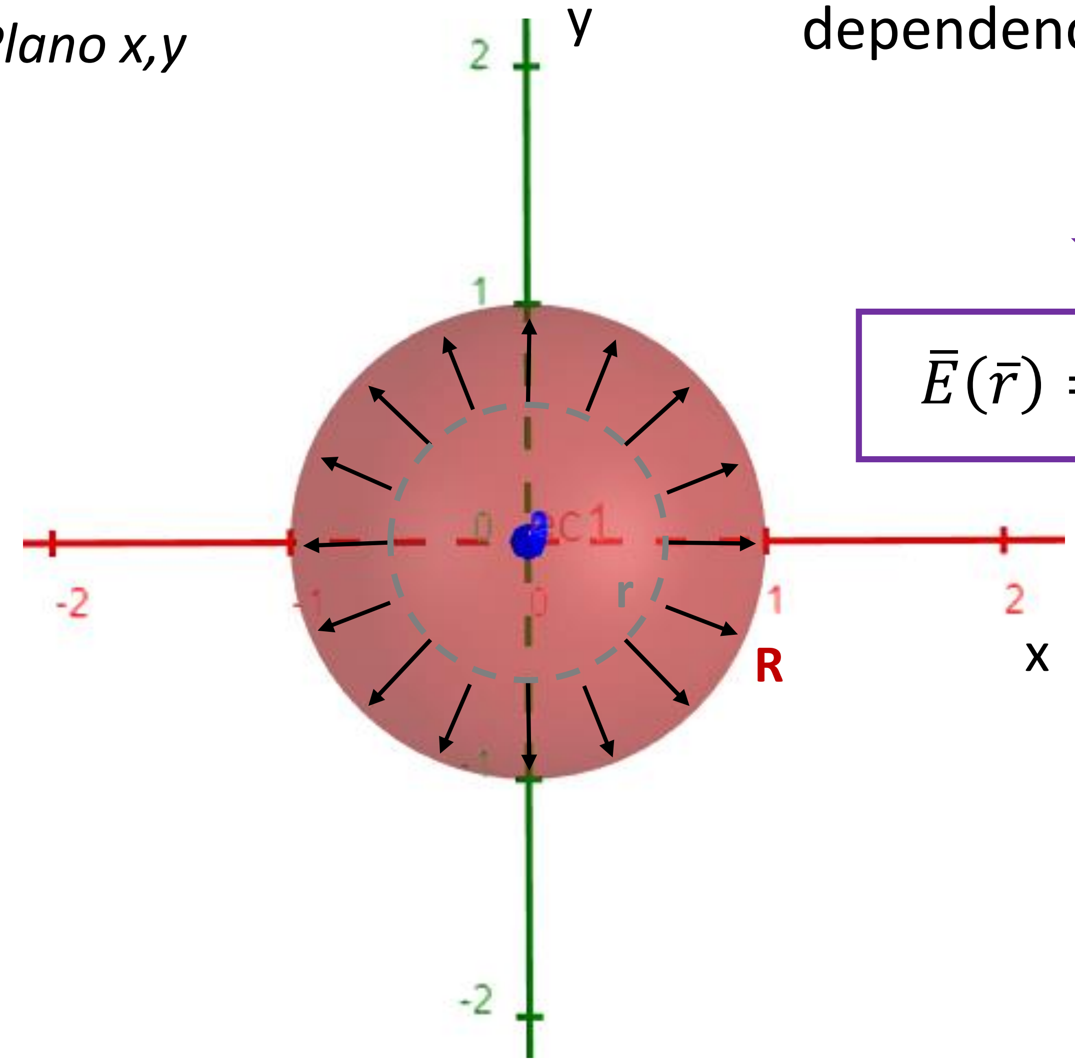
Del análisis previo su forma vectorial

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

¿Cómo calculamos dentro de la distribución? $r < R$

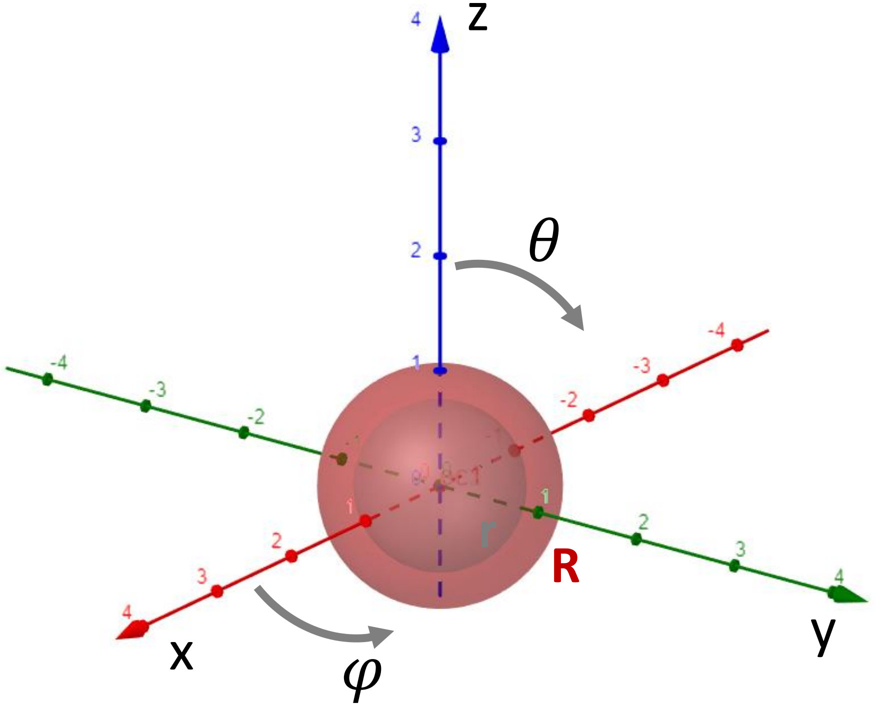
A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

Plano x,y



Repetimos el análisis para dependencia y dirección

$$\boxed{\bar{E}(\bar{r}) = |\bar{E}(r)|\ \check{r}}$$



$$\overline{dS} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\ \check{r}$$

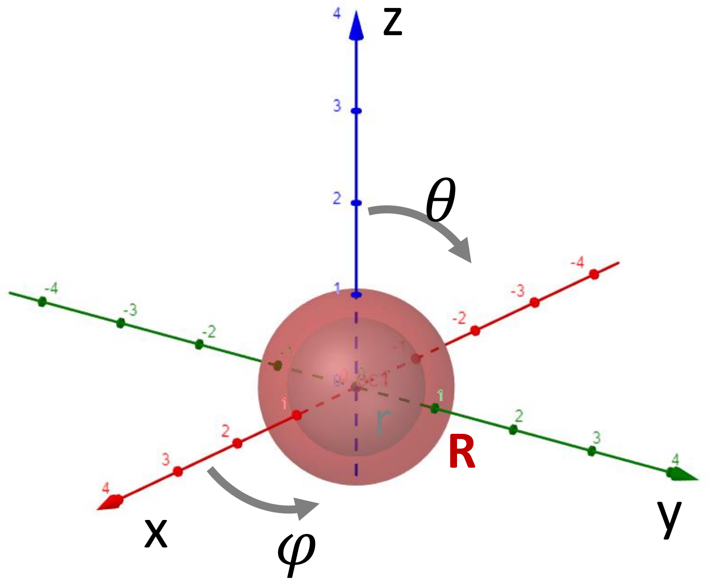
$$\bar{E}\ y\ \overline{dS}\ \ paralelos!$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

$r < R$

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

$$\emptyset = \oiint_S \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$



Lado izquierdo

$$\emptyset = \oiint_S |\bar{E}(r)|\,\check{r}\,.\,|\overline{dS}|\check{r} = \oiint_S |\bar{E}(r)||\overline{dS}|$$

$$= |\bar{E}(r)| \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \boxed{|\bar{E}(r)|4\pi r^2}$$

Lado derecho

$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV =$$

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr = \boxed{\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\, r^3}$$

$$|\bar{E}(r)| = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_0} r$$

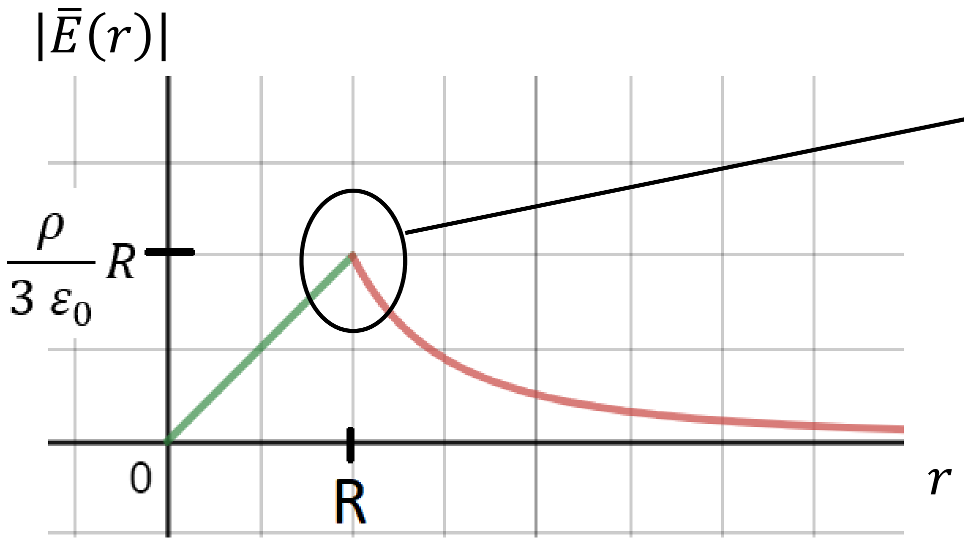
$$\boxed{\bar{E}(r) = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_0} r\ \check{r} \qquad r < R}$$

Sólo las cargas que encierra la Sup. de Gauss

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

a.- Calcular $\bar{E}$ en todo el espacio

$$\bar{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\ \varepsilon_0} r\ \check{r} & r \leq R \\ \dfrac{\rho}{3\ \varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2}\ \check{r} & r > R \end{cases}$$



Al ser continuo el campo podemos definirlo en r = R

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

b.- Establecer si es válida la Ley de Gauss → SI, es válida → ~~Porque pudimos calcular el campo~~

Es un enunciado fundamental que relaciona las cargas eléctricas y el flujo de campos eléctricos

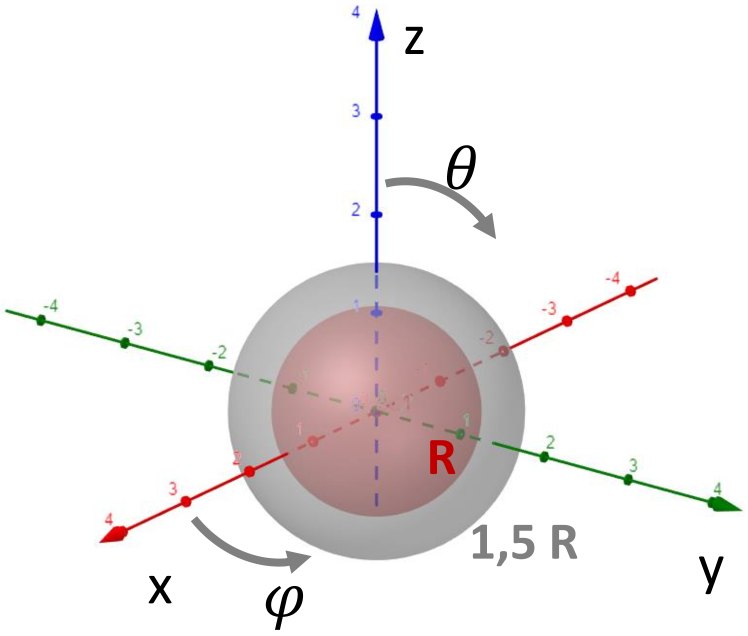
Es válida SIEMPRE

Permite calcular el flujo conociendo la carga encerrada

En ciertas condiciones (*contadas con los dedos de la mano*) nos permite calcular el módulo del campo eléctrico

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

c.- Calcular el flujo del campo eléctrico a través de un cubo centrado en el centro de la distribución de lado 3R.
Idem a través de una esfera de radio 1.5R. Discuta



$$\emptyset = \oiint_S \bar{E}.\overline{dS} = \oiint_S \frac{\rho}{3\ \varepsilon_0}\frac{R^3}{(1{,}5\ R)^2}\check{r}.\left|\overline{dS}\right|\check{r}$$

$$r = 1{,}5\ R$$

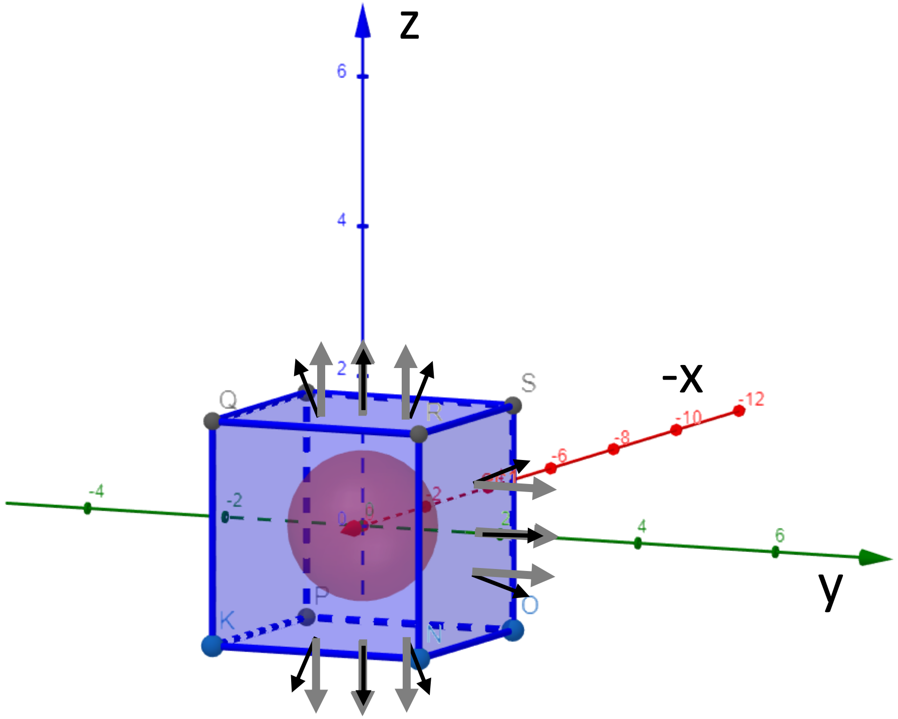
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho}{3\ \varepsilon_0}\frac{R}{(1{,}5)^2}\ (1{,}5\ R)^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi$$

$$\boxed{\emptyset = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\ R^3}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

c.- Calcular el flujo del campo eléctrico a través de un cubo centrado en el centro de la distribución de lado 3R. Idem a través de una esfera de radio 1.5R. Discuta



$$\emptyset = \oiint_S \bar{E}.\overline{dS} = \oiint_S \frac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\check{r}.\overline{dS} =$$

Hay que separar la integral en 6 integrales, 1 para cada lado del cubo!

$r = ?$

Usemos Gauss

$$\emptyset = \oiint_S \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi dr$$

$$\boxed{\emptyset = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3}$$

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

$$\boxed{\emptyset_{Esfera} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\ R^3}$$

$$\boxed{\emptyset_{Cubo} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\ R^3}$$

Por qué el flujo es igual para cualquiera de las dos superficies cerradas utilizadas?

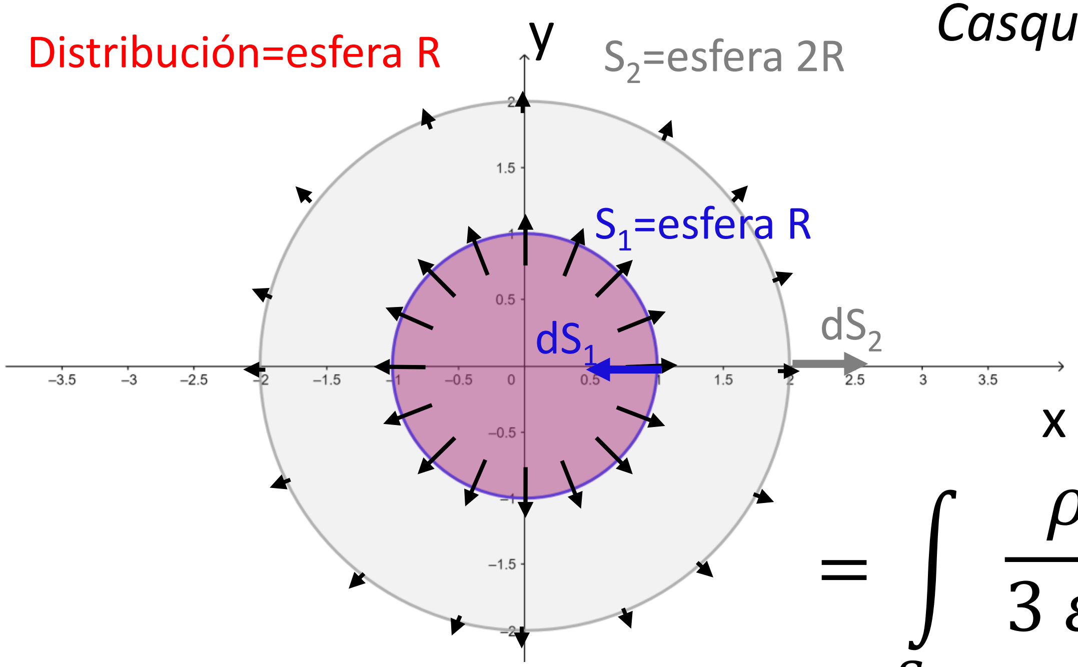
$$\emptyset = \oiint_S \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

d.- Calcular el flujo del campo eléctrico a través de esferas centradas respecto a la distribución de radios R y 2R, respectivamente.

A) $\rho = 2\ \mu C/m^3$

Distribución=esfera R



Plano x,y

Casquete esférico

$$\emptyset = \oiint_S \bar{E}.\overline{dS} = \iint_{S_1} \bar{E}.\overline{dS_1} + \iint_{S_2} \bar{E}.\overline{dS_2}$$

$$= \int_{S_1} \frac{\rho}{3\,\varepsilon_0} R \cdot \check{r}.\left|\overline{dS_1}\right|(-\check{r}) + \int_{S_2} \frac{\rho}{12\,\varepsilon_0} R\ \check{r}.\left|\overline{dS_2}\right|\check{r}$$

$$= -\frac{\rho}{3\,\varepsilon_0} R\ 4\pi R^2 + \frac{\rho}{12\,\varepsilon_0} R\ 4\pi(2R)^2 = 0$$

Usemos Gauss

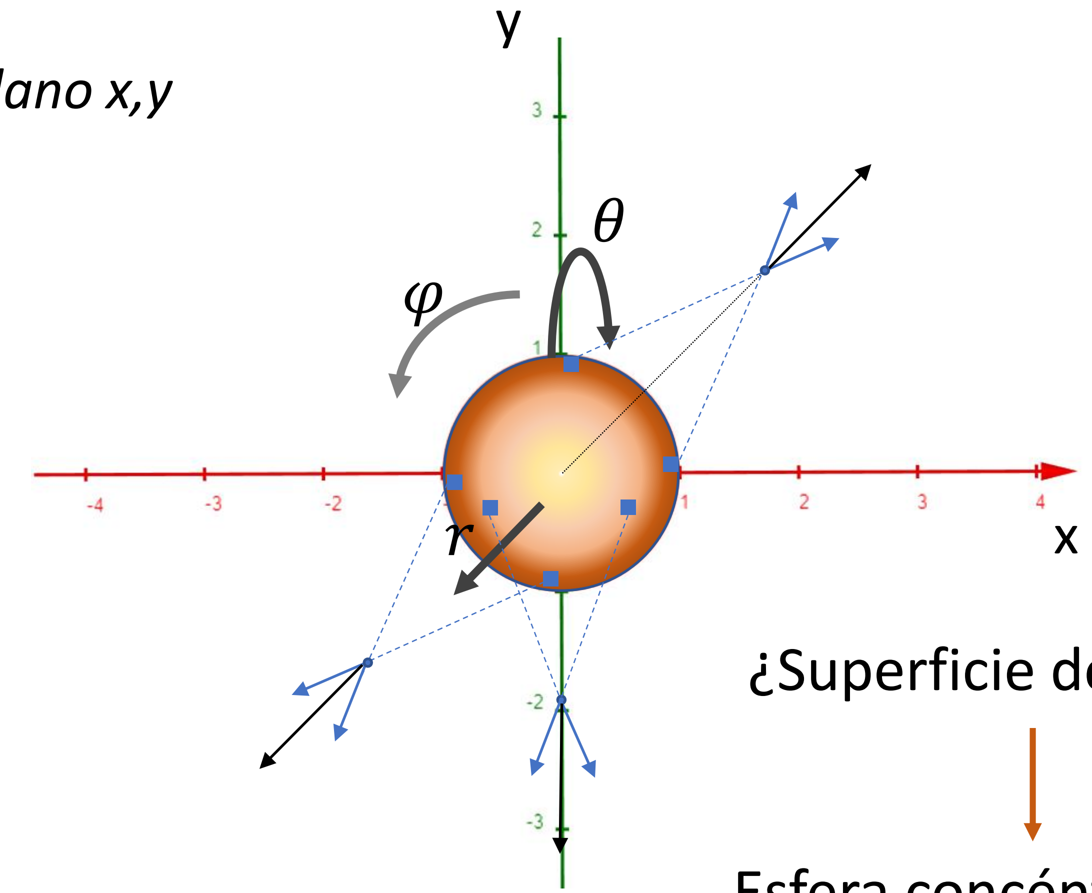
$$\emptyset = \oint_S \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = 0 \longrightarrow \boxed{\emptyset = 0} \longrightarrow \bar{E} \cancel{= 0}\ ?$$

NO!!

B) $\rho = 2\, r^3 \;\; \mu C/m^3 \qquad [r] = m$

a.- Calcular E en todo el espacio $\rightarrow$ $r < R$; $r > R$

Plano x,y



¿Cómo son las líneas de campo $\bar{E}$?

Coordenadas esféricas

$$\bar{E}\,(\bar{r}) = |\bar{E}(\,r, \cancel{\varphi}, \cancel{\theta})| \begin{cases} \check{r} \\ \cancel{\check{\varphi}} \\ \cancel{\check{\theta}} \end{cases}$$

Dependencia?

Dirección?

$$\boxed{\bar{E}(\bar{r}) = |\bar{E}(\,r)|\,\check{r}}$$

¿Superficie de Gauss?

Esfera concéntrica con la distribución de cargas!

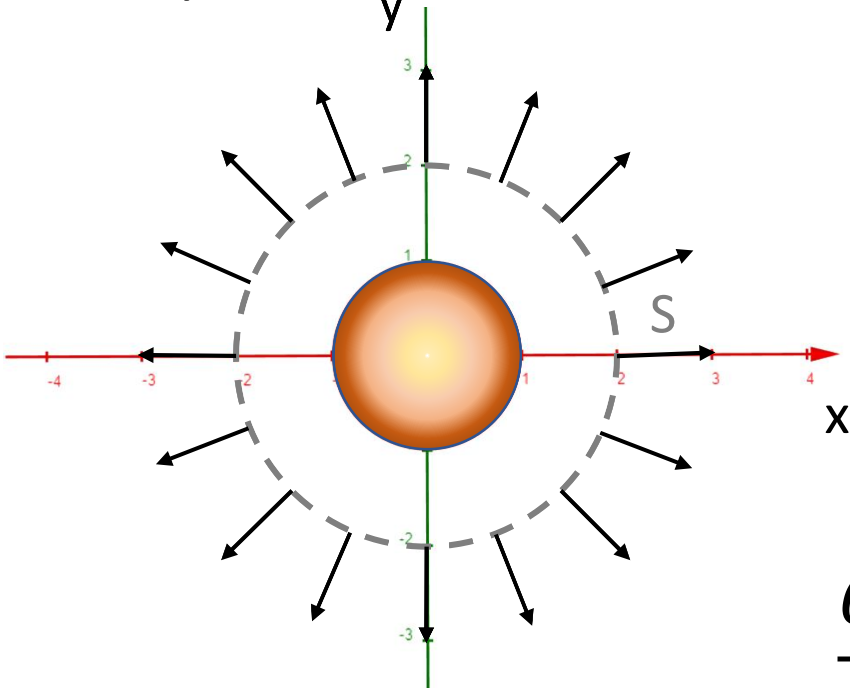
$\bar{E}\ y\ \overline{dS}\ \ paralelos!$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

B) $\rho = 2\,r^3\ \mu C/m^3$ $\quad r > R$

$$\emptyset = \oint_S \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Plano x,y



Lado izquierdo

$$\emptyset = \oiint_S |\bar{E}(r)|\,\check{r}\,.\,|\overline{dS}|\check{r} = \oiint_S |\bar{E}(r)||\overline{dS}|$$

$$= |\bar{E}(r)|\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \boxed{|\bar{E}(r)|4\pi r^2}$$

Lado derecho

$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{2r^3}{\varepsilon_0} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$\boxed{= \frac{2}{\varepsilon_0}\frac{4}{6}\pi\, R^6}$$

$$\overline{dS} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\ \check{r}$$

$$dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$\boxed{|\bar{E}(r)| = \frac{1}{3\,\varepsilon_0}\frac{R^6}{r^2} \qquad \bar{E}(r) = \frac{1}{3\,\varepsilon_0}\frac{R^6}{r^2}\,\check{r}}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

B) $\rho = 2\, r^3 \;\; \mu C/m^3 \qquad r < R$

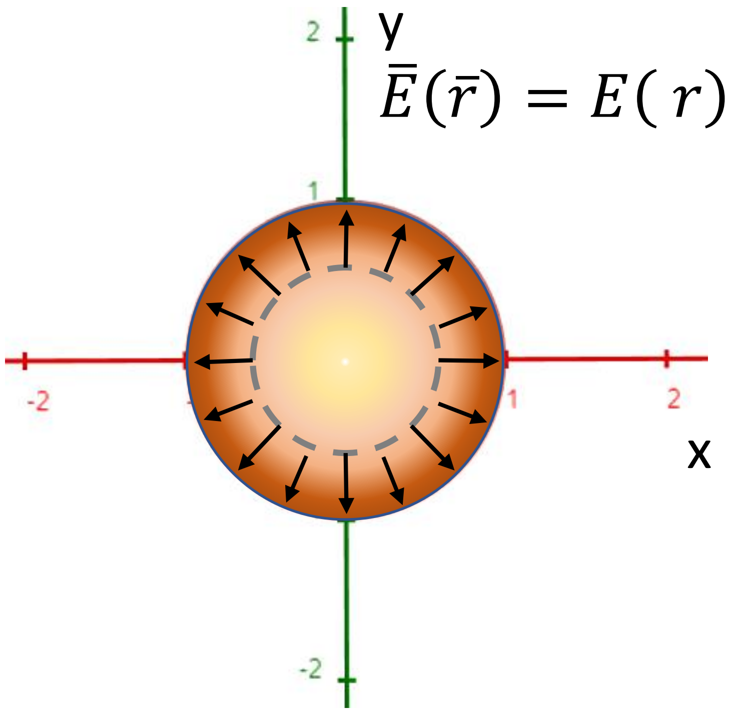
$$\emptyset = \oiint_S \bar{E} . \overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Lado izquierdo

Plano x,y

$$\emptyset = \oiint_S |\bar{E}(r)|\, \check{r} \,.\, |\overline{dS}|\check{r} = \boxed{|\bar{E}(r)| 4\pi r^2}$$

$\bar{E}(\bar{r}) = E(\,r\,)\,\check{r}$



Lado derecho

$$\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{2r^3}{\varepsilon_0} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$= \boxed{\frac{2}{\varepsilon_0} \frac{4}{6} \pi \, r^6}$$

Sólo las cargas dentro
de la Sup. de Gauss

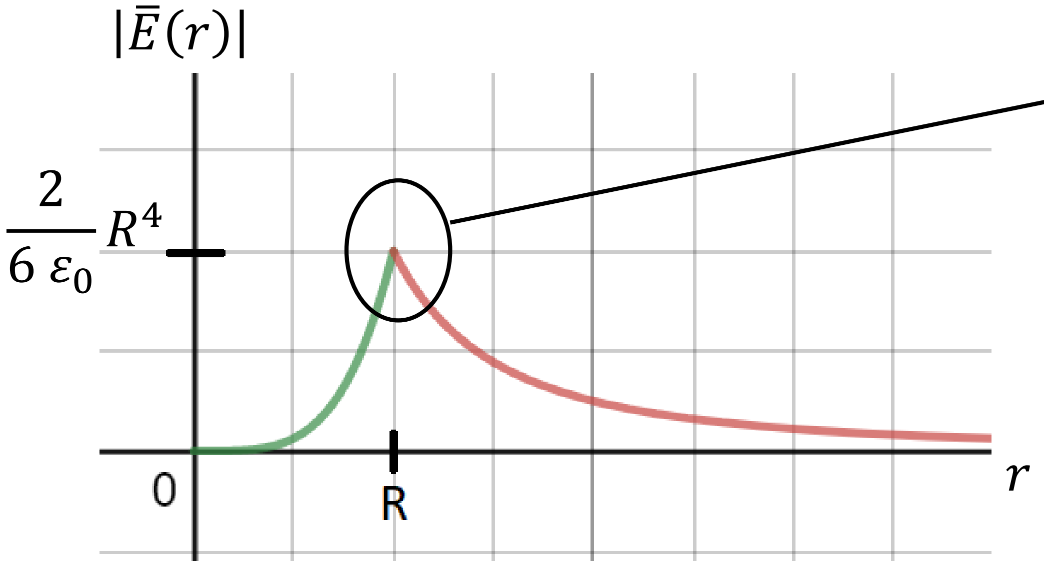
$$\boxed{|\bar{E}(r)| = \frac{1}{3\,\varepsilon_0} r^4 \qquad \bar{E}(r) = \frac{1}{3\,\varepsilon_0} r^4 \;\; \check{r}}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

B) $\rho = 2\, r^3 \;\; \mu C/m^3$

a.- Calcular $\bar{E}$ en todo el espacio

$$\bar{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{2}{6\,\varepsilon_0} r^4\, \check{r} & r \leq R \\[2ex] \dfrac{2}{6\,\varepsilon_0} \dfrac{R^6}{r^2}\, \check{r} & r > R \end{cases}$$



Al ser continuo el campo podemos definirlo en r = R

B) $\rho = 2\, r^3 \ \mu C/m^3$

b.- Establecer si es válida la Ley de Gauss → Es válida SIEMPRE

c.- Calcular el flujo del campo eléctrico a través de un cubo centrado en el centro de la distribución de lado 3R. Idem a través de una esfera de radio 1.5R. Discuta

$$\emptyset = \oiint_S \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \boxed{\frac{1}{3\,\varepsilon_0}\pi\, R^6}$$

Sólo depende de la carga encerrada, no de la superficie!

d.- Calcular el flujo del campo eléctrico a través de esferas centradas respecto a la distribución de radios R y 2R, respectivamente.

$$\emptyset = \oiint_S \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \boxed{= 0}$$

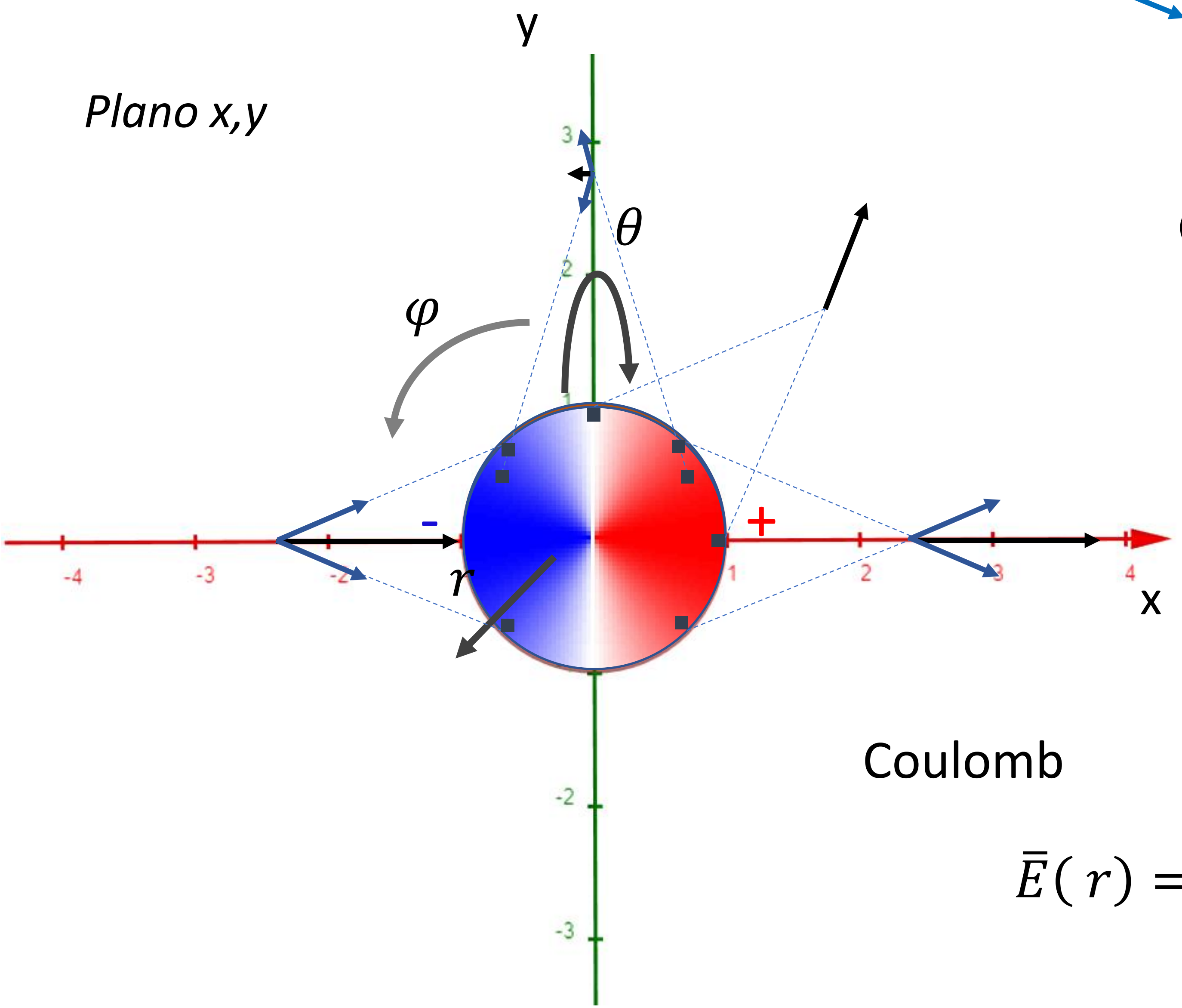
No hay carga encerrada, pero si campo!

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

C) $\rho = 2\cos\varphi \, \mu C/m^3 \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

a.- Calcular $\bar{E}$ en todo el espacio → $r < R$; $r > R$

Plano x,y



¿Cómo son las líneas de campo $\bar{E}$?

Coordenadas esféricas

$$\bar{E}\,(\bar{r}) = |\bar{E}(r,\varphi,\theta)| \begin{cases} \check{r} \\ \check{\varphi} \\ \check{\theta} \end{cases}$$

Dependencia?

Dirección?

¿Superficie de Gauss?

Coulomb

$$\bar{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{Esfera} dq' \frac{(\bar{r} - \bar{r'})}{|\bar{r} - \bar{r'}|^3}$$

Ver resolución ejercicio 9

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

C) $\rho = 2\cos\varphi \, \mu C/m^3$

b.- Establecer si es válida la Ley de Gauss → **Es válida SIEMPRE**

En este caso no nos sirve para calcular el campo!

c.- Calcular el flujo del campo eléctrico a través de un cubo centrado en el centro de la distribución de lado 3R. Idem a través de una esfera de radio 1.5R. Discuta

$$\emptyset = \oiint_S \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{2\cos\varphi}{\varepsilon_0} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \boxed{= 0}$$

Sólo depende de la carga encerrada, no de la superficie!

d.- Calcular el flujo del campo eléctrico a través de esferas centradas respecto a la distribución de radios R y 2R, respectivamente.

$$\emptyset = \oiint_S \bar{E}.\overline{dS} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \boxed{= 0}$$

No hay carga encerrada, pero si campo!

Como comentarios integradores de todos los ejemplos anteriores es importante primero remarcar que al aplicar la ley de Gauss las cargas en cuestión son las que se encuentran ***dentro*** de la superficie gaussiana. Esto significa que las que quedan fuera no colaboran en el resultado final.

Segundo, y **FUNDAMENTAL,** es recordar que la ley de Gauss es válida **SIEMPRE,** más allá de que el caso sea "fácil" o "difícil". De tanto aplicar esta ley a los casos simples, muchas personas terminan creyendo que la validez de la misma está restringida a estos ejemplos. Este es un **ERROR GRAVISIMO** que ha costado muchos exámenes.